

Arkusz 8 – Całkowanie - Komputerowe wspomaganie pomiarów (30)

Teoria

Po co nam potrzebna długość krzywej na wykresie albo też pole powierzchni pod tą krzywą?

Tego typu obliczenia są niezbędne. Oto garść przykładów:

- jakie jest ugięcie belki pod obciążeniem (czy dach się zawali)
- jakie ciśnienie panuje u podstawy zbiornika z wodą (czy go rozsadzi)
- jaka siła odśrodkowa działa na przedmiot w ruchu po okręgu (czy płyta CD w stacji się rozleci)
- ile się wydłuży linia wysokiego napięcia pod własnym ciężarem (czy porazi przechodniów)
- ile elektryczności przepłynie przez kondensator gdy zmieni się natężenie (czy nastąpi przebicie i posypią się iskry)
- jaką pracę wykonamy rozprężając gaz (czy lodówka będzie mrozić)
- jak długo będzie wyciekała woda z basenu przez otwór (ile czasu potrzeba na opróżnienie zbiorników wody w czasie powodzi)
- jaki będzie kapitał końcowy lokaty pieniężnej w banku przy określonym oprocentowaniu i kapitalizacji
- w jakiej ilości należy przechowywać zapasy służące do produkcji np. pieczywa w piekarni, aby koszty związane z przechowywaniem były jak najmniejsze
- ile paliwa musi spalać w każdej sekundzie rakieta kosmiczna, aby można było wynieść na orbitę okołozemską satelitę geostacjonarnego ...

Praktyka

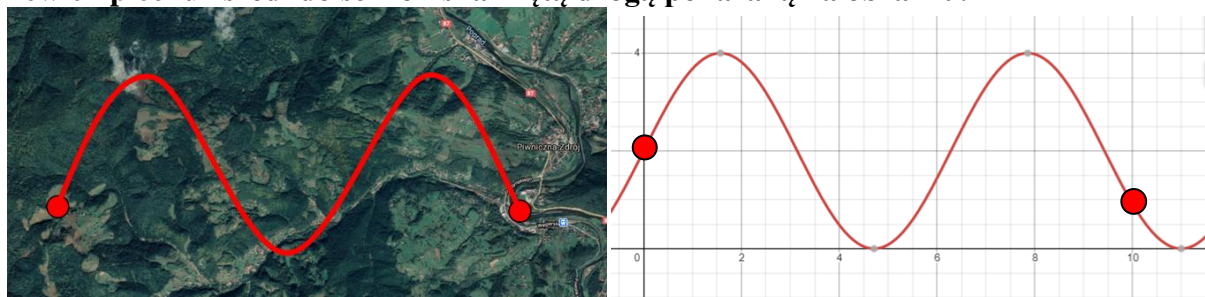
Dzielimy krzywą na mniejsze fragmenty, które przyjmujemy, że są krótkimi odcinkami.

Długość takiego odcinka liczymy za pomocą tw. Pitagorasa.

Powierzchnia pod takim odcinkiem jest trapezem, albo jeszcze łatwiej – prostokątem.

Zadanie

Pewien piechur szedł do schroniska krętą drogą pokazaną na obrazku.



Drogę piechura można opisać wzorem matematycznym: $y=2\cdot\sin(x)+2$, gdzie X i Y oznaczają współrzędne w kilometrach.

Oblicz drogę przebytą przez piechura.

Tabela (2)

Narysuj wykres punktowy.

X - zmieniają się w przedziale 0..10 co 0,1

Y - formuła $=2*\text{SIN}(A2)+2$

Aby narysować wykres punktowy funkcji matematycznej należy:

w jednej kolumnie ustawić punkty dla osi X



w drugiej kolumnie wyliczyć punkty dla osi Y z podanego wzoru

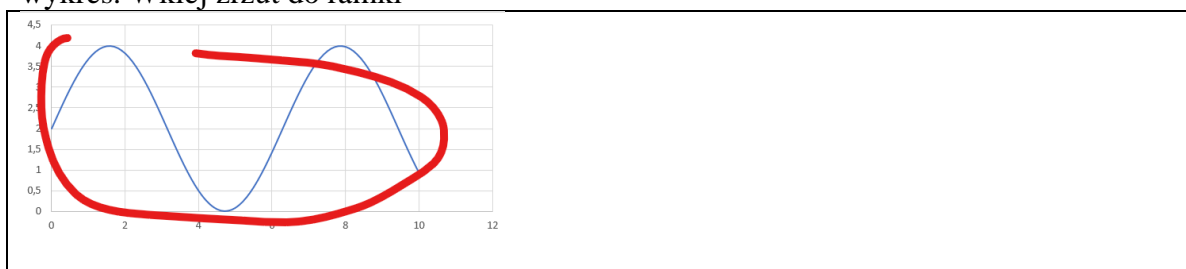
- Uruchom arkusz kalkulacyjny
- A1 wpisz X
- A2 wpisz 0 (zero)
- A3 wpisz formułę: $=A2+0,1$
- Powiel formułę na kolejne komórki, do wiersza 102
- B1 wpisz Y
- B2 wpisz formułę: $=2*\text{SIN}(A2)+2$
- Powiel formułę na kolejne komórki
- Zaznacz komórkę B2

- Wykonaj zrzut ekranu obejmujący fragment tabeli z obliczeniami, pasek formuły. Wklej zrzut do ramki

	A	B
1	X	Y
2	0	2
3	0,1	2,19967
4	0,2	2,39734
5	0,3	2,59104
6	0,4	2,77884

Wykres (2)

- Zaznacz kolumny A i B
- Wstawianie** – Wykres punktowy  - 
- Wykonaj zrzut ekranu obejmujący fragment tabeli z obliczeniami, pasek formuły i wykres. Wklej zrzut do ramki



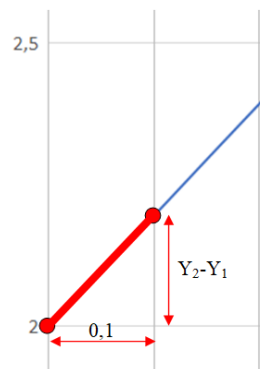
Długość (2)

Długość krzywej obliczamy z tw. Pitagorasa, sumując wszystkie przekątne fragmentów krzywej:

$$D = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

W naszym przypadku $X_2 - X_1$ wynosi 0,1, a $Y_2 - Y_1$ obliczymy odejmując wartości Y z kolumny B

- C1 wpisz napis DŁUGOŚĆ
- C3 wpisz formułę $= (0,1^2 + (B3 - B2)^2)^{1/2}$ =B3-B2
- Powiel formułę** na wszystkie komórki
W komórce C2 nic nie obliczamy, bo nie ma od czego odejmować
- Powiel formułę** na wszystkie komórki w dół
- D1 wpisz formułę $=SUMA(C3:C102)$
Suma wszystkich przekątnych obliczonych w kolumnie D. Przebyta droga przez piechura, to około 17 km
- Zaznacz komórkę C3
- Wykonaj zrzut ekranu obejmujący fragment tabeli z obliczeniami i pasek formuły. Wklej zrzut do ramki



	A	B	C	D
1	X	Y	DŁUGOŚĆ	17,03
2	0	2		
3	0,1	2,19967	0,22331	
4	0,2	2,39734	0,22153	
5	0,3	2,59104	0,21799	
6	0,4	2,77884	0,21271	
7	0,5	2,95885	0,20593	

Zadanie

Samolot poruszał się ruchem zmiennym i jego prędkość można było opisać następującym wzorem: $V=2000 \cdot \sin^2(t)-1000 \cdot \cos(t^2)+1000$, gdzie: t - czas ruchu [h] i V prędkość ruchu [km/h]. Lot trwał 5 godzin. Oblicz przebytą przez pojazd drogę.

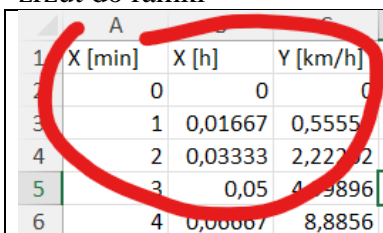
Z lekcji fizyki wiemy, że drogę można obliczyć z wykresu $V(t)$, jako pole powierzchni pod tym wykresem.

Tabela (2)

- Wstaw nowy, pusty arkusz do skoroszytu **SHIFT+F11**
- Wpisz nagłówki kolumn

	A	B	C	D	E	F
1	X [min]	X [h]	Y [km/h]	bok X [h]	bok Y [km/h]	POLE [km]

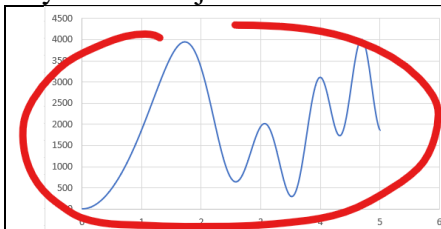
- 5 godzin lotu, to 300 minut. Aby zwiększyć dokładność obliczeń, do wzoru wstawiamy godziny z kolumny B, ale obliczenia co 1 minutę
- A2 wpisz liczbę 0
- A3 wpisz formułę $=A2+1$
- Powiel formułę na kolejne 300 komórek, do wiersza 302
- B2 wpisz formułę $=A2/60$
- Powiel formułę na kolejne 300 komórek
- C2 wpisz formułę $=2000 \cdot \sin(B2)^2 - 1000 \cdot \cos(B2^2) + 1000$
- Powiel formułę na kolejne 300 komórek
- Zaznacz komórkę C2
- Wykonaj zrzut ekranu obejmujący fragment tabeli z obliczeniami, pasek formuły. Wklej zrzut do ramki



1	X [min]	X [h]	Y [km/h]
2		0	0
3	1	0,01667	0,5555
4	2	0,03333	2,2222
5	3	0,05	4,9896
6	4	0,06667	8,8856

Wykres (2)

- Zaznacz kolumny B i C
- Narysuj wykres punktowy (jak w poprzednim zadaniu)
- Wykonaj zrzut ekranu obejmujący fragment tabeli z obliczeniami, pasek formuły i wykres. Wklej zrzut do ramki



Pole powierzchni (2)

Pole powierzchni pod wykresem obliczamy sumując wszystkie pola powierzchni pod poszczególnymi fragmentami krzywej. Pola powierzchni za pomocą prostokątów.

- D3 wpisz formułę $=B3-B2$
- Powiel formułę na kolejne 300 komórek
Bok prostokąta w godzinach. Wiersz drugi w obliczeniach pusty, bo nie ma poprzedniego punktu
- E3 wpisz formułę $=C3$

- Powielamy formułę na kolejne 300 komórek
- F3 **wpisz formułę** $=E3*D3$
- **Powiel formułę** na kolejne 300 komórek
- G1 **wpisz formułę** $=SUMA(F3:F302)$
Suma wszystkich wartości z kolumny F. Przebyta droga, to około 9676 km
- Zaznacz komórkę G1
- Wykonaj zrzut ekranu obejmujący fragment tabeli z obliczeniami i pasek formuły. Wklej zrzut do ramki

	A	B	C	D	E	F	G
1	X [min]	X [h]	Y [km/h]	bok X [h]	bok Y [km/h]	POLE [km]	9675,89
2	0	0	0				
3	1	0,01667	0,55554	0,01667	0,5555427	0,00925904	
4	2	0,03333	2,22202	0,01667	2,22201658	0,03703361	
5	3	0,05	4,99896	0,01667	4,99895972	0,06001129	
6	4	0,06667	8,8856	0,01667	8,88560449	0,14809341	450
7	5	0,08333	13,8809	0,01667	13,880881	0,23134802	400
8	6	0,1	19,9834	0,01667	19,9834217	0,33305703	

Zadanie

Krzywa drgań tłumionych (np. fala na wodzie) ma postać $y = \left(1 \frac{1}{3}\right)^{-\alpha} \cdot \sin(2\alpha)$, gdzie α oznacza kąt w stopniach, który zmienia się od 0 do 720° co 1°.
Oblicz pole powierzchni pod wykresem i długość krzywej.

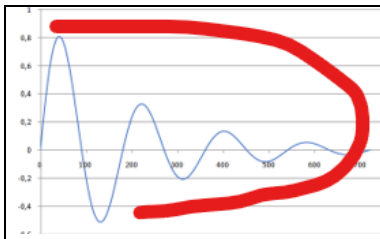
Tabela (2)

- Wstaw nowy arkusz do skoroszytu - SHIFT+F11
- Wpisz początkowe ustawienie komórek
- A2 **wpisz** 0 (zero)
- A3 **wpisz formułę** $=A2+1$
- **Powiel formułę** z A3 na kolejnych 719 komórek (ostatnia wartość 720)
- B2 **wpisz formułę** $= (1+1/3)^{(-RADIANY(A2))} \cdot \sin(2 \cdot RADIANY(A2))$
kąt w stopniach zamieniamy na radiany
- **Powiel formułę** z B2 na pozostałe komórki
- Zaznacz komórkę B2
- Wykonaj zrzut ekranu obejmujący fragment tabeli z obliczeniami i pasek formuły. Wklej zrzut do ramki

	A	B
1	kąt	fala
2	0	
3	1	0,0347
4	2	0,0696
5	3	0,1043
6	4	0,1364

Wykres (2)

- Zaznacz kolumny A i B
- **Narysuj wykres** punktowy (jak w poprzednim zadaniu)
- Wykonaj zrzut ekranu obejmujący fragment tabeli z obliczeniami, pasek formuły i wykres. Wklej zrzut do ramki



Całkowanie (2)

- Wpisz do komórek kolejne nagłówki: pole i długość
- C2 **wpisz formułę** $=\text{RADIANY}(1)*B2$
pole powierzchni prostokąta o bokach: 1 radian i wysokość fali
- Powiel formułę** na wszystkie komórki w dół
- D3 **wpisz formułę** $=(\text{RADIANY}(1)^2+(B3-B2)^2)^{0,5}$
długość odcinka z tw. pitagorasa, trójkąt ma boki 1 radian i różnica wysokości fal
- Powiel formułę** na wszystkie komórki w dół
- Zaznacz komórkę D3
- Wykonaj zrzut ekranu obejmujący fragment tabeli z obliczeniami i pasek formuły. Wklej zrzut do ramki

C	D
Pole	Długość
0	
0,00061	0,03886
0,00121	0,03892
0,0018	0,03913
0,00238	0,03772

Pole (2)

- Wpisz do komórek napisy
- F1 **wpisz formułę** $=\text{SUMA.JEŻELI}(B:B;">=0";C:C)$
Sumowanie wszystkich pól powierzchni – kolumna C, dla których fala – kolumna B jest dodatnia
- F2 **wpisz formułę** $=\text{SUMA.JEŻELI}(B:B;"<0";C:C)$
Sumowanie pól pod wykresem
- Zaznacz komórkę F1
- Wykonaj zrzut ekranu obejmujący fragment tabeli z obliczeniami i pasek formuły. Wklej zrzut do ramki

E	F
Pole+	1,310954
Pole-	-0,83432
Długość+	
Długość-	
Pole	
Długość	

Długość (2)

- F3 **wpisz formułę** $=\text{SUMA.JEŻELI}(B:B;">=0";D:D)$
Sumowanie długości fal nad wykresem – dodatnie
- F4 **wpisz formułę** $=\text{SUMA.JEŻELI}(B:B;"<0";D:D)$

Sumowanie długości fal pod wykresem – ujemne

- Zaznacz komórkę F3
- Wykonaj zrzut ekranu obejmujący fragment tabeli z obliczeniami i pasek formuły. Wklej zrzut do ramki

E	F
Pole+	1,310954
Pole-	-0,83432
Długość+	7,233002
Długość-	6,719207
Pole	
Długość	

Pod i Nad (2)

- F5 **podsumuj pola powierzchni** $=F1+(-F2)$
Suma pól dodatnich i ujemnych
- F6 w podobny sposób **podsumuj długości**
- Zaznacz komórkę F6
- Wykonaj zrzut ekranu obejmujący fragment tabeli z obliczeniami i pasek formuły. Wklej zrzut do ramki

E	F
Pole+	1,310954
Pole-	-0,83432
5 Długość+	7,233002
2 Długość-	6,719207
3 Pole	2,145277
2 Długość	0,513795
2	

Wiatry

W pliku tekstowym **WIATRY.TXT** znajdują się odczyty z czujnika mierzącego siłę wiejącego wiatru. Chcemy wyliczyć z jaką siłą wiał wiatr w badanym okresie i jaką moc będziemy mogli wygenerować z elektrowni wiatrowej. W tym celu policzymy pole powierzchni pod wykresem.

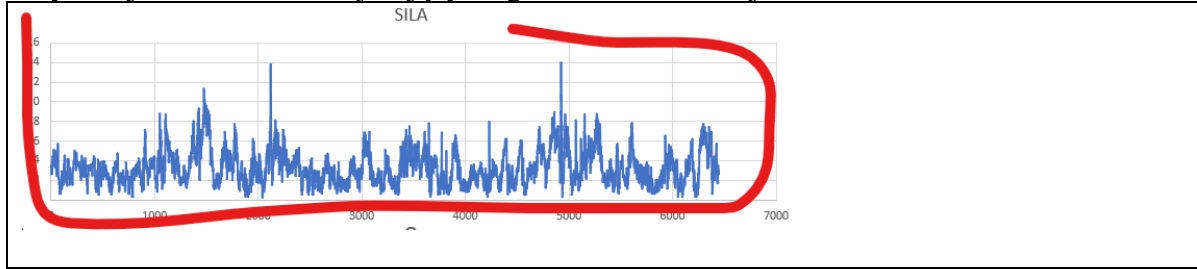
Tabela (2)

- Nowa zakładka w arkuszu kalkulacyjnym
- Otwórz w przeglądarce plik **WIATRY.txt**
<https://zsobobowa.eu/pliki/arkusz/WIATRY.txt>
- **Wklej wszystko do notatnika, a z notatnika do arkusza**
Wklejanie bezpośrednio do arkusza może przebiegać z problemami
- Wstaw jeden **pusty wiersz** na początku
- Wstaw jedną **pustą kolumnę** pomiędzy kolumny A i B
- Wstaw napisy, jak pokazuje rysunek
- Wykonaj zrzut ekranu obejmujący fragment tabeli. Wklej zrzut do ramki

	A	B	C	
	DATA	NR	SILA	KIERUNEK
2	04.02.2021 10:24		2,6	S
3	04.02.2021 10:34		3,5	SSW
4	04.02.2021 10:44		3	SSW
5	04.02.2021 10:54		2,9	SSW
6	04.02.2021 11:04		3	SW
7	04.02.2021 11:14		3	SSE

Wykres (2)

- W pustej kolumnie B wstaw kolejne **liczby całkowite**
- Z kolumn B i C przygotuj **wykres punktowy**
- Wykonaj zrzut ekranu obejmujący fragment tabeli. Wklej zrzut do ramki



Pole (2)

- W komórce E1 policz **pole powierzchni** pod wykresem – sumę wartości z kolumny C
- Wybierz komórkę E1
- Wykonaj zrzut ekranu obejmujący fragment tabeli i wykres. Wklej zrzut do ramki

